Оглавление

[Введение 2](#_Toc168014500)

[Основная терминология для последовательностей 3](#_Toc168014501)

[Процесс экстраполяции Ричардсона 8](#_Toc168014502)

[Методы преобразования последовательностей 9](#_Toc168014503)

[1. ρ – алгоритм Винна и обобщения 9](#_Toc168014504)

[1.1. ρ – алгоритм Винна 9](#_Toc168014505)

[1.2. Модификации ρ – алгоритма 14](#_Toc168014506)

[2. ϑ – алгоритм Брезински 15](#_Toc168014507)

[Заключение 16](#_Toc168014508)

[Список литературы 17](#_Toc168014509)

# Введение

Ускорение сходимости последовательностей и суммируемых рядов является важной задачей в численных вычислениях. Применение специальных алгоритмов и преобразований к рядам позволяет значительно сократить количество итераций, необходимых для достижения желаемой точности, сохраняя при этом значение суммы.

Одним из таких методов является ρ-алгоритм, разработанный Питером Винном в 1956 году. Этот численный метод предназначен для ускорения сходимости последовательностей, особенно чередующихся рядов. ρ-алгоритм основан на использовании разностных схем и применяется для последовательностей, сходящихся к пределу логарифмически. Его обобщения включают модификации и расширения исходного алгоритма для улучшения эффективности и применимости в различных ситуациях.

Другим важным методом является ϑ-алгоритм, открытый Клодом Брезински в 1971 году. Данный метод также предназначен для ускорения сходимости и является обобщением ρ-алгоритма Винна. ϑ-алгоритм используется для численного вычисления пределов и сумм бесконечных рядов и основан на итерационном процессе, включающем различные шаги специальной трансформации для улучшения скорости сходимости и повышения точности расчетов.

Обобщенные версии ρ-алгоритма Винна и ϑ-алгоритма Брезински могут включать дополнительные модификации, такие как улучшенные стратегии выбора параметров, оптимизированные процедуры вычислений и другие методы, направленные на улучшение производительности и точности численных вычислений.

# Основная терминология для последовательностей

*Обозначения множеств*:

– множество натуральных чисел, ℕ = {1,2, 3, …}

– множество натуральных чисел с нулем, ℕ0 = ℕ ∪ {0}

– множество действительных чисел

– множество комплексных чисел

*Последовательности и порядок сходимости*:

{} – последовательность частичных сумм, где определяется как сумма первых членов последовательности , ∊ . Если < 0, то = 0.

– частичная сумма бесконечной последовательности

– предел последовательности частичных сумм, или сумма последовательности

Скорость и порядок сходимости последовательностей определяются следующим образом: последовательность , сходящаяся к , имеет порядок сходимости и скорость сходимости , если .

*Асимптотическое поведение функций*:

Пусть и – функции, определенные в области ⊂ и пусть ∊, тогда

обозначает, что существует константа и окрестность U() точки такие, что выполняется:

Следствие: Если на , то ограничена на .

Пусть и – функции, определенные в области ⊂ и пусть ∊, тогда

обозначает, что существует константа ∊ и окрестность U() точки такие, что выполняется:

Следствие: Если на , то при .

*Асимптотические последовательности и разложения*:

Последовательность функций {} (​), определенная в области ⊂ и такая, что , кроме, возможно, точки ​, называется асимптотической последовательностью при 𝑧 → , если ∀

Формальный ряд называется асимптотическим разложением *f(z)* относительно асимптотической последовательности {} (​) по определению Пуанкаре, если

Если такое разложение существует, то оно единственно, а также его коэффициенты могут быть вычислены при помощи рекуррентной формулы:

*Остаток последовательности и его оценка*:

Пусть {} либо сходится к некоторому пределу , либо если она расходиться – может быть просуммирована подходящим методом для получения .

Тогда элемент последовательности может ∀ ∈ быть разбит на предел, или антипредел, и остаток в соответствие с .

Так как – частичные суммы ряда, , то остатки имеют вид: .

Преобразования последовательностей различаются в зависимости от предположений о поведении остатков как функций от . Эти предположения приводят к различным стратегиям частичного исключения остатков .

Пусть у функции есть асимптотическое разложение по асимптотической последовательности {} при. Тогда первый член ряда называется ведущим членом и обозначается как , что означает:

В рассматриваемых трансформациях используются :

где {} – подходящая асимптотическая последовательность.

*Сходящиеся и расходящиеся последовательности*:

Если последовательность сходится, то число, к которому она стремится, называется пределом. В случае, когда последовательность расходится, число называется антипределом, если существует метод, позволяющий суммировать к этому значению. Значение антипредела зависит от характера расходящейся последовательности, и поэтому точного определения для него нет.

Важные утверждения о расходящихся последовательностях:

* Расходящиеся последовательности могут быть интерпретированы таким образом, что им можно сопоставить некоторые значения, называемые антипределами.
* Для аппроксимации антипределов могут использоваться экстраполяционные методы, позволяющие оценить значения, к которым расходящиеся последовательности могли бы сходиться при определенных условиях.
* Могут быть обработаны так же, как и сходящиеся, как с вычислительной, так и с теоретической точки зрения.

*Виды сходимости*:

Поведение многих сходящихся последовательностей , сходящихся к некоторому пределу можно охарактеризовать асимптотическим условием:

Последовательность сходится:

* Линейно, если
* Логарифмически, если
* Гиперлинейно, если

При последовательность расходится.

*Класс F(m)*:

Мы говорим, что функция , определённая для y∊(0,b] (b>0), где y дискретная или непрерывная переменная, принадлежит множеству, если существуют функции и и константа A такие, что

Функции *ϕk(y)* определены для y ∊ (0, b] и функции ( - непрерывная переменная), которые непрерывны на [0, ] (), и имеют асимптотическое разложение:

Утверждение: Пусть , предел или антипредел которой равен , и , предел или антипредел которой равен . Тогда функция и её предел или антипредел равен , причём m≤m1+m2.

*Класс* :

Функция α(x) определённая для сколь угодно больших принадлежит множеству , если у неё есть асимптотическое разложение формы:

Если , то строго.

*Класс b(m):*

Последовательность принадлежит множеству , если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m:

k = 1, …, m так, что строго для некоторого целого числа .

Утверждение: Если ∊ , тогда ∊ для каждого .

*Классы последовательностей*:

1. Логарифмически сходящиеся:

, если

1. Линейно сходящиеся:

, если

1. Факториально сходящиеся:

, если

1. Факториально расходящиеся:

, если

*Преобразование* *последовательности*:

Последовательность {}, которая либо расходится, либо сходится настолько медленно, что её применение становится практически невозможным, преобразовывается с помощью функции в новую последовательность {}, которая сходится быстрее:

:{}→{}, ∈

Вычислительные алгоритмы могут выполнять только конечное число операций, поэтому будут работать лишь с конечными подмножествами последовательностей, содержащими последовательные элементы {, , ..., }, где — порядок преобразования.

Преобразование представляется как функция:

: → .

Каждое преобразование может быть записано в виде двумерной таблицы , где верхний индекс указывает строку, а нижний индекс — столбец:

Последовательность = {(, )} упорядоченных пар целых чисел , ∈ ​ ​ называется путем, если и для всех выполняется и , причем хотя бы одно из отношений и должно быть истинным.

Преобразование является регулярным на пути , если для любой сходящейся последовательности {} выполняется:

Функция называется ускоряющей сходимость, если:

Иначе говоря, ускоряет сходимость последовательности при преобразовании в , если сходится к быстрее, чем , то есть:

*Символ Похгаммера*:

Пусть – функция, стремящаяся к нулю при z → ∞. Факториальный ряд для представляет собой разложение следующего типа:

Символы Похгаммера (растущие факториалы) выражаются операцией

В общем случае будет иметь простые полюса в точках z = , где ∈

# Процесс экстраполяции Ричардсона

# Методы преобразования последовательностей

## ρ – алгоритм Винна и обобщения

* 1. ρ – алгоритм Винна

Алгоритм *ρ* Винна предназначен для вычисления четных сходящихся интерполирующих дробей Тиле и их экстраполяции к бесконечности.

Интерполирующая дробь Тиля, или четная сходящаяся дробь, имеет вид рациональных функций:

где отношение представляет собой приближение к пределу. Четные порядки конвергентов являются рациональными функциями, представленными в виде частного двух полиномов. Алгоритм Винна выполняет вычисление интерполирующей рациональной функции и ее экстраполяцию к бесконечности с меньшим количеством арифметических операций по сравнению с аналогичными рекурсивными алгоритмами.

Метод *ρ* ускоряет сходимость логарифмических последовательностей в и очень эффективен для последовательностей таких, что:

Поскольку , ведет себя плавно при . Следовательно, вблизи можно очень эффективно аппроксимировать рациональной функцией от , ), со степенью числителя, равной степени знаменателя, а может служить как хорошее приближение для . В частности, можно выбрать для интерполяции в точках.

Как указали Смит и Форд, *ρ*-алгоритм Винна хорошо работает с некоторыми логарифмическими последовательностями, но не работает с другими логарифмическими последовательностями, поэтому объясним этот факт.

Процесс экстраполяции Ричардсона состоит в пропускании интерполяционного полинома степени через пары (, ), ..., (, ) c использованием формулы Невилла-Эйткена, затем вычисляют значение этого полинома при = 0. Алгоритм *ρ* состоит из передачи рациональной интерполяционной дроби, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены степени , через пары точек (, ), ..., (, ), используя интерполяционную формулу Тиле, а затем вычисляя значение этой рациональной дроби по .

Поскольку ρ-алгоритм – частный случай *взаимных разностей*, начнем c их определения. Пусть – функция, взаимные разности которой с аргументами , , . . . определяются рекурсивно:

Заменив на в получим следующую цепную дробь:

Последние две составляющие простейшие дроби в формуле цепной дроби имеют следующий вид:

Равенство справедливо при . Правая часть равенства называется *интерполяционной формулой Тиля*.

Рассмотрим функцию , значение которой известно в некотором числе точек при . ρ-алгоритм Винна определяется заменой вместо и вместо во взаимной разности:

Покажем, что рациональная дробь , числитель и знаменатель которой представляют собой полиномы степени и такая, что

находится в виде:

Тогда получаем, что и позволяет взять эту величину как аппроксимацию предела последовательности при . Расчет осуществляется с использованием расширенной формы *ρ*-алгоритма, который представляет собой не что иное, как расчет взаимных разностей.

Нелинейная рекурсивная стандартная схема алгоритма *ρ* Винна выглядит следующим образом:

учитывая, что и .

Данный метод работает с последовательностью строго возрастающих и неограниченных с ростом интерполяционных точек , которые должны быть положительными и различными ∀ :

Видно, что структура *ρ*-алгоритма идентична структуре ε-алгоритма Винна, но отличается наличием самой последовательности интерполяционных точек. Только элементы c четным порядком в методе *ρ* используются для аппроксимации предела, тогда как элементы нечетного порядка служат вспомогательными величинами и могут расходиться, если вcя последовательность сходится, то есть величины с нечетным нижним индексом являются лишь промежуточными расчетами и не имеют никакого значения.

Несмотря на формальное сходство, алгоритмы Винна ε и *ρ* существенно различаются по способности ускорять сходимость. Алгоритм *ρ* Винна эффективен для логарифмически сходящихся последовательностей, но не подходит для линейно сходящихся или расходящихся последовательностей, в случае которых выгоднее будет применять ε алгоритм.

Поскольку дроби четного порядка интерполяционной цепной дроби построены таким образом, что они удовлетворяют условиям интерполяции , то

Теорема.

Если применить *ρ-*алгоритм к последовательности :

то преобразование .

Доказательство.

Покажем верность этого утверждения при помощи интерполирующей дроби Тиля, подразумевающей следующую непрерывную дробь:

Учитывая значение для дроби в цепочке дроби Тиля

получаем

Соответственно, . Таким образом, ρ-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, удовлетворяющей условию

Cвойства *ρ-*алгоритма:

Некоторые свойства *ρ-* и ε*-* алгоритмов Винна схожи.

Свойство 1.

Свойство 2. (Алгебраические)

2.1. Если применение *ρ-*алгоритма на и дает соответственновеличины и , тогда:

2.2. Если применение *ρ-*алгоритма на и дает соответственновеличины и , тогда:

Итак, ρ-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, имеющей асимптотическое разложение вида:

где — отрицательное целое число, а — константы, не зависящие от .

Теорема. (Асимптотическое поведение ρ-алгоритма)

…

Примечание:

*ρ*-алгоритм — алгоритм экстраполяции рациональной дроби, числитель и знаменатель которой имеют одинаковую степень. Можно рассматривать это как частный случай метода Булирша и Стоера, где степени числителя и знаменателя произвольны.

Причины применения ρ-алгоритма Винна для логарифмически сходящихся рядов:

1. Преобразование интерполяционных точек

Алгоритм *ρ* Винна включает последовательность интерполяционных точек , что позволяет более гибко подходить к обработке ряда. Логарифмически сходящиеся ряды характеризуются тем, что их члены уменьшаются медленно, и традиционные методы ускорения сходимости могут оказаться неэффективными. Интерполяционные точки дают возможность алгоритму адаптироваться к медленной сходимости, обеспечивая более точное аппроксимирование предела.

1. Адаптация к логарифмической сходимости

*ρ*-алгоритм Винна строит последовательность рациональных функций, которая учитывает форму логарифмически сходящихся рядов. Он использует четные порядки элементов для аппроксимации предела, что позволяет лучше учитывать особенности поведения логарифмически сходящихся рядов.

1. Комплементарные свойства

Алгоритм *ρ* Винна дополняет ε алгоритм Винна, который эффективен для линейно сходящихся последовательностей, но не может ускорить логарифмическую сходимость. В то время как ε алгоритм эффективен для суммирования чередующихся расходящихся рядов, алгоритм *ρ* Винна специально разработан для работы с логарифмически сходящимися рядами, что делает его эффективным инструментом в таких случаях.

1. Устойчивость к осцилляциям и расходимости

Логарифмически сходящиеся ряды часто не демонстрируют осцилляционного поведения, характерного для некоторых других типов рядов. *ρ*-алгоритм Винна, учитывая свою структуру и использование интерполяционных точек, обеспечивает устойчивость к осцилляциям и помогает избежать расходимости, эффективно аппроксимируя пределы таких рядов.

* 1. Модификации ρ – алгоритма

## ϑ – алгоритм Брезински

# Заключение

# Список литературы

1. Brezinski, C. (1977). *Acceleration de la Convergence en Analyse Numerique*. Springer-Verlag.
2. Osada, Naoki. *Acceleration Methods for Slowly Convergent Sequences and Their Applications*. January 1993.
3. Weniger, E. J. (2003). Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series. *Computer Physics Repor*ts, 1(1), 1-123.
4. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (2003). *Extrapolation Methods: Theory and Practice*. Amsterdam: North-Holland.
5. Sidi, A. (2003). *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
6. Van Tuyl, A. H. (1994). Acceleration of Convergence of a Family of Logarithmically Convergent Sequences. Mathematics of Computation, 63(207), 229-246. American Mathematical Society.
7. Weniger, E. J. (1990). On the derivation of iterated sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. *Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg*, W-8400 Regensburg, Germany.
8. Borghi, R., & Weniger, E. J. (2015). Convergence analysis of the summation of the factorially divergent Euler series by Padé approximants and the delta transformation. *Dipartimento di Ingegneria, Università "Roma Tre", I-00144 Rome, Italy and Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany.*